* 研究简讯 *

实二次数域的 Kronecker 极限公式的应用*

纪春岗　陆洪文

同济大学数学研究所，上海 200092

摘要　设奇素数 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，ε_p 为实二次数域 $K=Q(\sqrt{p})$ 的基本单位并且 K 的类数为 1. 计算 K 的一种 Hecke L-函数的 Kronecker 极限公式并由此得到了关于正则子 $\ln\varepsilon_p$ 的一个有趣的恒等式

关键词　实二次数域　正则子　Kronecker 极限公式

对于给定的数域 K，求出 K 上各种 Zeta-函数或 L-函数在 $s=1$ 处 Laurent 展式的常数项是一个重要的数论问题. 历史上，Kronecker[1] 首先算出了虚二次数域的情形[2]. 1917 年，Hecke[3] 首次对实二次数域算出了第一个结果. 之后相继有 Herglotz[4]，Meyer[5]，Zagier[6] 以及 Shintani[7] 等. 在文献[8,9]中，我们讨论了带 Dirichlet 特征的极限公式. 本文主要考虑的是极限公式的一个应用.

设 p,q 是两个不同的素数，且 $p\equiv q\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，$h(L)$ 和 $R(L)$ 分别是双二次数域 $L=Q(\sqrt{p},\sqrt{q})$ 的类数和正则子(Regulator). ε_p 是实二次数域 $K=Q(\sqrt{p})$ 的基本单位. 令

$$W=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\frac{\varepsilon_p^{-2}+\mathrm{i}\varepsilon_p^{2}}{\varepsilon_p^{-2}-\mathrm{i}\varepsilon_p^{2}},\quad W^*=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{p}}{2}\frac{\varepsilon_p^{2}+\mathrm{i}\varepsilon_p^{-2}}{\varepsilon_p^{2}-\mathrm{i}\varepsilon_p^{-2}},$$

而 Γ 是复平面中圆心在 $\frac{1}{2}$，半径为 $\frac{\sqrt{p}}{2}$ 的上半圆周，$\Gamma(W,W^*)$ 是 Γ 上从 W 到 W^* 的那一段圆弧. 对基本判别式 q，以 $\chi_q(*)$ 记 Kronecker 特征. $\eta(*)$ 为 Dedekind η-函数. 设数域 K 的类数为 1. 我们定义 K 的一种 Hecke L-函数

$$L_K(s,\chi_q)=\sum_{B}\frac{\chi_q(N(B))}{(N(B))^s},\quad Re(s)>1,$$

其中 B 过 K 的所有整理想，N 是从 K 到 Q 的范. 再定义 Eisenstein 级数

$$E(s,Z)=\sum_{\substack{m,n=-\infty\\(m,n)\neq(0,0)}}^{+\infty}\frac{\chi_q(m^2+mn+\frac{1-p}{4}n^2)Y^s}{|m+nZ|^{2s}},\quad Re(s)>1.$$

显然 $E(s,Z)$ 在 $Re(s)>1$ 上是解析的. 仿照文献[9]不难证明下述的

引理 1

2000-03-22 收稿，2000-05-11 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号：19531020)

$$L_K(s,\chi_q) = -\frac{\Gamma(s)p^{-\frac{s-1}{2}}}{4\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}\int_{\Gamma(W,W^*)}\frac{E(s,Z)}{Z^2 - Z + \frac{1-p}{4}}\mathrm{d}Z, \quad Re(s) > 1.$$

又因为 $E(s,Z+q) = E(s,Z)$, 所以可以对 $E(s,Z)$进行 Fourier 展开,再在其 Fourier 展开式中让 $s\to 1$, 这样仿照文献[9]不难证明下述的

引理 2

$$E(s,Z) = -2\pi q^{-1}\ln q - \frac{\pi^2 i}{6}(1-q^{-2})(Z-\bar{Z})$$
$$+\frac{2\pi}{q}\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{\substack{un=v\\u,n\geqslant 1}}\frac{1}{n}\sum_{m(\mathrm{mod}\,q)}\chi_q\left(m^2+mn+\frac{1-p}{4}n^2\right)\left(e^{2\pi i(um+vZ)/q} + e^{2\pi i(-um-v\bar{Z})/q}\right)$$
$$+0(|s-1|), \quad s\to 1.$$

这样由引理 1 和引理 2,我们得到关于函数 $L_K(s,\chi_q)$的 Kronecker 极限公式,即

定理 1

$$L_K(1,\chi_q) = -\frac{4\ln q\ln\varepsilon_p}{q\sqrt{p}} + \frac{\pi i(q-1)\ln\varepsilon_p}{3q\sqrt{p}}$$
$$+\frac{1}{q}\int_{\Gamma(W,W^*)}\left(\ln\eta(qZ) + \sum_{0\leqslant m\leqslant q-1}\chi_q\left(m^2+m+\frac{1-p}{4}\right)\ln\eta\left(\frac{m+Z}{q}\right)\right)\frac{\mathrm{d}Z}{Z^2-Z+\frac{1-p}{4}}.$$

用文献[10]中定理 2. 3 和文献[11]中定理 4. 9 以下的说明,可以证明下述的

引理 3

$$L_K(1,\chi_q) = \frac{4}{q\sqrt{p}}\frac{h(L)R(L)}{\ln\varepsilon_p}.$$

利用定理 1 以及引理 3,我们有

定理 2

$$\frac{h(L)R(L)}{\ln\varepsilon_p} + \ln q\ln\varepsilon_p + \frac{(1-q)\pi i}{12}\ln\varepsilon_p$$
$$= \frac{\sqrt{p}}{4}\int_{\Gamma(W,W^*)}\left(\ln\eta(qZ) + \sum_{0\leqslant m\leqslant q-1}\chi_q\left(m^2+m+\frac{1-p}{4}\right)\ln\eta\left(\frac{m+Z}{q}\right)\right)\frac{\mathrm{d}Z}{Z^2-Z+\frac{1-p}{4}}.$$

很容易从定理 2 导出下面的两个系.

系 1

$$\frac{h(L)R(L)}{\ln\varepsilon_p} + \ln q\ln\varepsilon_p$$
$$= \frac{\sqrt{p}}{4}\int_{\Gamma(W,W^*)}\left(\ln|\eta(qZ)| + \sum_{0\leqslant m\leqslant q-1}\chi_q\left(m^2+m+\frac{1-p}{4}\right)\ln\left|\eta\left(\frac{m+Z}{q}\right)\right|\right)\frac{\mathrm{d}Z}{Z^2-Z+\frac{1-p}{4}}.$$

系 2

$$\frac{(1-q)\pi}{3\sqrt{p}}\ln\varepsilon_p =$$

$$\int_{\Gamma(W, W^*)}\left(\arg\eta(qZ)+\sum_{0\leq m\leq q-1}\chi_q\left(m^2+m+\frac{1-p}{4}\right)\arg\eta\left(\frac{m+Z}{q}\right)\right)\frac{\mathrm{d}Z}{Z^2-Z+\frac{1-p}{4}}.$$

参 考 文 献

1 Kronecker L. Werke, Leipzig, 1929. 4: 347, 5:1

2 Siegel C L. Lectures on Analytic Number theory. Tata Institute Bombay, 1961

3 Hecke E. Mathematische Werke, Herausgegeben im Auftrage der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1959

4 Herglotz G. Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper. I, II Berichte über die Verhandl. d Sächsischen Akad. der Wiss Zu Leiplig 1923, 75: 3, 31

5 Meyer C. Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über Quadratischen Zahlkörpern, Berlin: Akademic Verlag, 1957

6 Zagier D. A Kronecker limit formula for real quadratic fields. Math Ann, 1975, 213: 153

7 Shintani T. On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J Fac Sci Univ Tokyo, 1977, 24(1): 167

8 Lu Hongwen. Kronecker limit formula of real quadratic fields (I). Sci Sinica (A), 1984, 27: 1233

9 Lu H, et al. Kronecker limit formula for real quadratic fields (II), Science in China (Sci Sinica) (A), 1989, 32: 1409

10 陆洪文. 二次数域的高斯猜想. 上海: 上海科学技术出版社, 1994

11 Washington L C. Introduction to Cyclotomic Fields. New York: Spring-Verlag, 1982